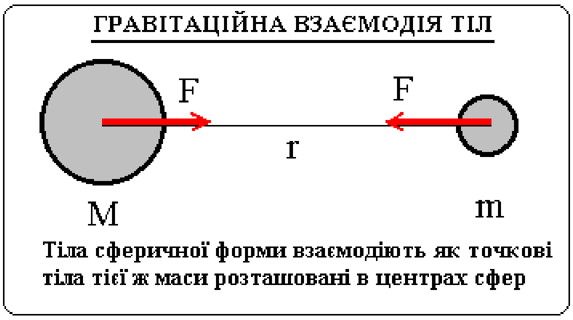
3. НЕБЕСНА МЕХАНІКА. РУХ НЕБЕСНИХ ТІЛ.

3.1. Гравітаційна взаємодія.

1°.Сила та енергія гравітаційної взаємодії. Маса та густина Землі.

Однорідні сферичні тіла, та ті, які можна вважати точковими, притягуються, за законом всесвітнього тяжіння Ньютона, з силою прямопропорційною добутку їх мас (M та m), оберненопропорційною квадрату відстані між ними (r) і напрямленої по прямій, що їх з`єднує.

$$F = G\frac{mM}{r^2}.$$



Коефіцієнтом пропорційності служить гравітаційна стала

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{нм^2}{кг^2}.$$

Вимірювання в 1798 р. гравітаційної сталої Генрі КЕВЕНДІШЕМ (CAVENDISH H.,10.10.1731 – 24.02.1810, Англія) стало останнім кроком у вирішенні проблеми визначення маси Землі. Саме тому ці вимірювання Кевендіша назвали зважуванням Землі.

Дійсно, для здійснення потрібних обчислень, достатньо силу вагомості, з якою Земля масою M притягує тіло масою m на своїй поверхні, розписати по закону всесвітнього тяжіння.

$$mg = \frac{GMm}{R^2},$$

де R земний радіус.

Звідси

$$M = \frac{gR^2}{G}.$$

Обчислення дають: $M \approx 6 \cdot 10^{24}кг$.

За масою M і радіусом R Землі можна знайти її середню густину

$$\rho = \frac{M}{4/3\,\pi\, R^3} \approx 5{,}5\frac{кг}{м^3}.$$

2⁰. Гравітаційно зв'язана пара. Супутники. Космічні швидкості

Сила притягання (гравітаційна сила) надає тілам гравітаційної потенціальної енергії (W_G).

$$W_G = -G\frac{Mm}{r} = -\frac{c}{r}.$$

Зауваження

До формули потенціальної енергії можна прийти знайшовши роботу гравітаційної сили при переміщенні точкового тіла між двома точками на відстані r_0 та r від центрального тіла (центра сили).

Елементарна робота гравітаційної сили

$$\Delta A = F\ S_F.$$

Проекція переміщення на напрямок сили завжди $S_F = -\Delta r$. Взявши значення сили на деякій відстані r_c за середнє, матимемо

$$\Delta A \approx -\frac{c}{r_c^2}(r - r_0) \approx -\frac{c}{r\,r_0}(r - r_0) = -\frac{c}{r_0} - (-\frac{c}{r}).$$

За законом зміни потенціальної енергії

$$\Delta A = W_{p0} - W_p,$$

тому

$$W_p = -\frac{c}{r} + \text{const}.$$

Константа рівна енергії на нескінченності, оскільки при $r \to \infty$ $W_g \to c$.

Розумно енергію, як і саму силу, на нескінченності вважати рівною нулю. З цим слід вважати const = 0 і формулу гравітаційної потенціальної енергії записувати: $W_G = -\frac{GMm}{r}$.

Якщо деяке тіло (масою m) рухається в полі тяжіння іншого (масою M) зі швидкістю v, то його повна механічна енергія буде складатися з кінетичної та потенціальної

$$W = W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}.$$

За законом зміни та збереження механічної енергії кінцева енергія тіла буде рівна початковій

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{r_0}.$$

При віддаленні одного тіла від іншого на нескінченість $(r = \infty)$ потенціальна енергія стане рівною нулю.

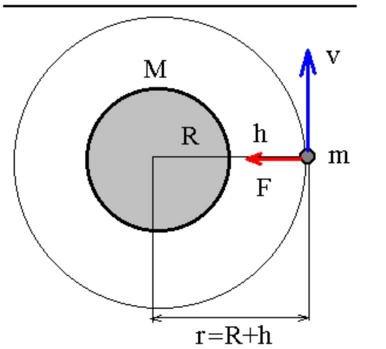
Якщо тіло в кінцевій точці не втратить повністю кінетичну енергію, то це означатиме, що початкова повна енергія тіла була позитивною.

Повна втрата кінетичної енергії означатиме нульову початкову енергію

Зрозуміло, що при від'ємній початковій повній енергії одне тіло не може звільнитись від притягання іншого, і буде рухатись навколо нього по замкненій траєкторії. Такі тіла утворюють *гравітаційно зв'язану пару*.

Якщо в гравітаційно зв'язаній парі (W < 0) маса одного тіла значно менша іншого, то перше вважають ***супутником*** другого.

Знайдемо швидкість супутника з коловою орбітою на висоті h над поверхнею центрального тіла.



Сила гравітаційного притягання супутника до центрального тіла, значно більшої маси, обумовлює доцентрове прискорення супутника і траєкторію його руху, в залежності від напрямку початкової швидкості

Запишемо другий закон динаміки для руху супутника

$F = ma_n$, де $F = \dfrac{GMm}{r^2}$, $a_n = \dfrac{v^2}{r}$.

Після підстановки отримаємо:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

звідки отримаємо вираз швидкості супутника через масу центрального тіла

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

За попереднім,

$$GM = gR^2.$$

Після підстановки останнього виразу в попередню формулу, виразимо швидкість супутника через прискорення вільного падіння на поверхні центрального тіла.

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}.$$

Перша космічна швидкість *(колова швидкість) – це швидкість супутника з коловою траєкторією, радіус якої практично не відрізняється від радіуса центрального тіла.* Оскільки r = R, то

$$v_I = \sqrt{gR}.$$

Перша космічна швидкість для Землі становить 7,9 км/с.

Друга космічна швидкість *(параболічна швидкість) –це найменша швидкість, при якій дане тіло з поверхні центрального тіла може віддалитись на будь-яку відстань від нього.*

Оскільки на нескінченності (r = ∞), тіло, за даних умов, має втратити швидкість, а з нею кінетичну енергію, разом з потенціальною, то, за законом збереження енергії, початкова енергія тіла з такою швидкістю також рівна нулю

$$\frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0.$$

Звідси:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

або

$$v_{II} = \sqrt{2gR}.$$

Видно, що *друга космічна швидкість в* $\sqrt{2}$ *разів перевищує першу*.

Для Землі друга космічна швидкість становить біля 11,2 км/с.

Аналогічно розраховується третя космічна швидкість, як найменша швидкість, яка дозволяє подолати притягання Сонця і вийти за межі Сонячної системи.

Для Землі (при старті з її поверхні) вона становить 16,7 км/с.

Подекуди розглядають і інші космічні швидкості , які дозволяють подолати тяжіння системи, в яку входить Сонце і т. д.

3.2. Закони руху небесних тіл. Закони Кеплера

Ці закони стосуються траєкторій руху всіх супутників, хоча були сформульовані Кеплером для планет Сонячної системи.

1^o. Перший закон Кеплера

Тіло в гравітаційно зв'язаній парі, яке має значно меншу масу, є супутником іншого. Більш масивне тіло служить центром гравітаційної сили для супутника. Можна довести (див. відповідну статтю автора), що існують дві точки розташування центра сили відносно супутника з даною енергією E. Сума відстаней до них

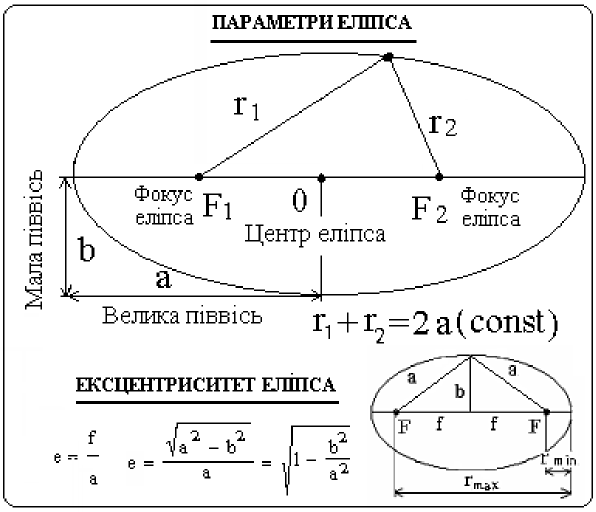
$$r_1 + r_2 = -\frac{C}{E} \, (E<0).$$

Останнє співвідношення повинно бути справедливим для довільної точки траєкторії.

Лінія, сума відстаней точок якої до двох фіксованих точок (які називаються фокусами) є величиною сталою, називається ***еліпсом****.*

Отже траєкторія супутника є еліпсом.

Використовуючи названу в означенні властивість еліпса, можна накреслити його, закріпивши кінці ненатягненої нитки в двох точках (наприклад на гвіздках) і, розтягуючи нитку вістрям олівця, вести олівець по паперу. В такий спосіб, наприклад розмічають еліптичні квіткові клумби.



Траєкторія руху супутника є завжди еліптичною, так як коло теж можна розглядати як еліпс зі співпадаючими фокусами.

Перший закон Кеплера для гравітаційних пар Сонце – планета стверджує, що *кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.*

Примітка. Відстань між фокусами еліпса називається фокусною відстанню Відстань від центра еліпса до фокуса є пів фокусною (f). Відношення півфокусної відстані до великої півосі називається ексцентриситетом еліпса (e).

$$e=\frac{f}{a}, \text{ також } \; e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\,.$$

Очевидно, що для кола e = 0.

2º. Другий закон Кеплера

Цей закон руху є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

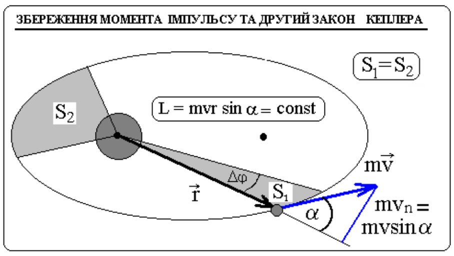
$$L=mvr\sin\alpha=mv_n r=const.$$

Розглянемо рух за проміжок часу, що прямує до нуля.

$$v_n=\omega\cdot r=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}r\,.$$

$$L=m\frac{\Delta\varphi\cdot r^2}{\Delta t}\,,$$

де $\frac{1}{2}\Delta\varphi\cdot r^2=S$ – площі сектора круга з радіусом r.

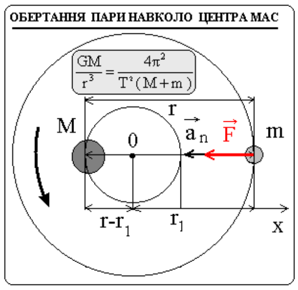


Відношення площі сектора до часу його проходження радіус-вектором називається секторальною швидкістю (v_S). Зі сталості момента імпульсу випливає сталість секторальної швидкості.

Оскільки площа еліптичного сектора $S = v_S t$, то звідси випливає справедливість ***другого закону Кеплера***, згідно якому *радіус-вектор планети за однакові проміжки часу покриває однакові площі.*

Цей закон, зокрема пояснює, чому швидкість планети на еліптичній орбіті зростає з наближенням до Сонця, а супутника з наближенням до центрального тіла.

3^o^. Третій закон Кеплера



Якщо в гравітаційно зв'язаній парі система відліку пов'язана з одним із тіл, то можна говорити про обертання навколо нього іншого тіла. Якщо ж систему відліку пов'язати з центром мас, то в цій системі кожне тіло буде рухатись навколо цієї точки.

Розглянемо випадок колових траєкторій, і запишемо другий закон динаміки для тіла масою m.

$$F = ma_n,$$

$$\text{де } F = \frac{GMm}{r^2}, \quad a_n = \frac{4\pi^2}{T^2} r_1$$

Щоб виразити r_1 через r скористаємося формулою координати центра мас $x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$.

Якщо обрати початок координат в центрі мас, то матимемо

$$0 = \frac{mr_1 - M(r - r)_1}{m + M},$$

звідки

$$r_1 = \frac{Mr}{M + m}.$$

Після підстановки в початкову формулу отримаємо:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi^2 mMr}{T^2(M+m)}, \text{ звідки}$$

$$\frac{G}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2(M+m)}.$$

Якщо $r_2 << r_1$, то r можна вважати великою піввіссю (радіусом) орбіти тіла меншої маси, і на основі наведених міркувань сформулювати ***третій закон Кеплера***, який *стверджує, що квадрати зоряних періодів обертання планет відносяться як куби великих півосей їх орбіт.*

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{A_1^3}{A_2^3}.$$

Уточнення цього закону здійснив Ньютон, ввівши до квадратів періодів множниками суму мас центрального тіла (Сонця) та супутника (планети), і надавши закону форми, яка випливає з попереднього доведення

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \frac{A_1^3}{A_2^3}.$$

Видно, що Кеплерова форма закону випливає з останньої, якщо центральне тіло є спільним для двох супутників ($M_1 = M_2 = M$) і можна знехтувати їх масами у порівнянні з масою центрального тіла ($m << M$)

3.3. Визначення мас небесних тіл

Наближене визначення маси космічного тіла масою М може бути здійснене за періодом Т обертання його супутника з коловою орбітою радіусом r і масою $m<<M$. Так, орбіту Землі, при обертанні її навколо Сонця, з великою точністю можна вважати коловою.

В цьому випадку за другим законом динаміки

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r,$$

звідки

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

Знаючи період Т обертання Землі навколо Сонця (тривалість року) за цією формулою можна обчислити масу Сонця. $M_0 = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

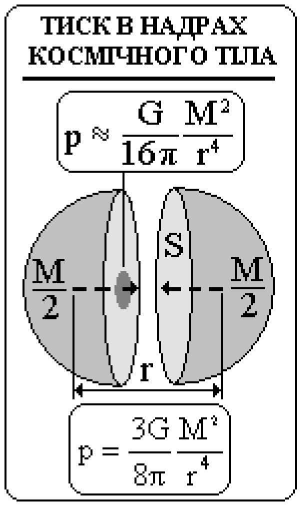
Більш надійний спосіб визначення мас дає уточнений закон Кеплера. За цим законом можна порівняти маси гравітаційно зв'язаних пар, наприклад Сонце - Земля та Земля - Місяць, або Сонце - інша планета. Так, для обчислення маси Юпітера–найбільшої планети Сонячної системи, матимемо:

$$\frac{T_Ю(M_o + m_Ю)}{T_0(M_o + m_+)} = \frac{A}{A_0}.$$

Звідси маса Юпітера $m_Ю=318m_+$, де m_+ - маса Землі

3.4. Внутрішній гравітаційний тиск та гравітаційна енергія тіла

Можна зробити оцінку гравітаційного тиску в центрі сферичного тіла, вважаючи, що цей тиск створюється силою притягання двох половин тіла на відстані радіуса розподіленої по площі центрального перерізу кулі.



$$p \approx \frac{G\frac{M}{2}\cdot\frac{M}{2}}{r^2 S} = \frac{GM^2}{4r^2\cdot\pi r^2} = \frac{G}{4\pi}\frac{M^2}{r^4}.$$

За точними обчисленнями

$$p = \frac{3G}{8\pi}\frac{M^2}{r^4}.$$

Оцінити тиск можна *методом розмірностей*, зваживши на те, що шуканий тиск може залежати лише від маси та радіуса тіла, а також гравітаційної сталої, тобто

$$p \sim G^x M^y R^z.$$

Для розмірностей в обох частинах

$$кг\ м^{-1}с^{-2} = (кг^{-1}м^3с^{-2})^x\ кг^y\ м^z = кг^{-x-y}м^{3x+z}с^{-2x}.$$

Прирівнявши показники степенів при однакових одиницях вимірювання,

матимемо $x = 1$; $y = 2$; $z = -4$.

Тому

$$p \sim \frac{GM^2}{r^4}.$$

Зауваження

Точно гравітаційний тиск в центрі однорідного кулястого тіла можна обчислити, виходячи з того, що елементарний тиск dp на кулю площею поверхні $S = 4\pi r^2$ та масою $M = \rho\ 4/3\ \pi r^3$, створюваний оболонкою товщиною $|\,d\,r\,|$ і масою $dm = \rho\ 4\pi r^2\,|\,d\,r\,|$ визначається гравітаційним притяганням цієї оболонки до кулі .

$$dp = \frac{F_G}{S} = \frac{G\rho 4\pi r^2\,|\,dr\,|\cdot\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2\,4\pi r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 r\,|\,dr\,|.$$

Тиск в центрі кулі визначається сумою тисків всіх оболонок, радіус яких зменшується від r до 0. Врахувавши. що $dr = -|dr|$

$$p = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2\int_r^0 r\,dr = -\frac{4}{6}\pi G\rho r^2\Big|_r^0 = \frac{4}{6}\pi G\rho^2 r^2.$$

Підставивши

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$$

отримаємо

$$p = \frac{3G}{8\pi}\frac{M^2}{r^4}.$$

Гравітаційна енергія тіла

Гравітаційну енергію кулястого тіла наближено можна подати, як енергію взаємодії двох його половин на відстані радіуса.

$$W_g \approx -\frac{GM^2}{4r}.$$

Точні обчислення дають

$$W = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{r}.$$

Зауваження

При точних обчисленнях, як і в попередньому випадку, слід знайти енергію d W притягання кулі і поверхневої оболонки товщиною |dr|, а далі просумувати внески енергії всіх оболонок при зменшенні їх радіуса до 0.

$$W_i = -G\frac{\rho 4\pi r^2 \,|\, dr \,|\cdot \rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = \frac{16}{3}\pi^2 G \rho^2 r^4 dr.$$

$$W = \frac{16}{3}\pi^2 G\rho^2 \int_r^0 r^4\, dr = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 r^5$$

Після підстановки ρ

$$W = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{r}.$$

Вправи

1. Визначити прискорення вільного падіння $g^|$ на поверхні Місяця, якщо радіус його R в 3,7, маса M в 81 раз менші земних.

Відповідь. $g^| = \frac{GM_0 13{,}69}{R_0^2 81} = 0{,}17g \approx 1{,}658\ м/с^2$.

Розв'язання. Силу тяжіння на поверхні Місяця можна розписати по закону всесвітнього тяжіння

. $mg^| = \frac{GMm}{R^2}$, звідки $g^| = \frac{GM_0 13{,}69}{R_0^2 81} = 0{,}17g \approx 1{,}658\ м/с^2$.

2. Визначити швидкість і період обертання штучного супутника Землі з коловою орбітою на висоті над Землею рівній половині її радіуса .

Відповідь. $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{3R}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, v_1 = 0{,}8v_1 \approx 6{,}45\ м/с^2$.

Розв'язання. За формулою швидкості с супутника на коловій орбіті $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. Після підстановки отримаємо відповідь.

3. Знайти масу Юпітера за рухом його супутника Іо, який обертається навколо Юпітера по коловій орбіті з періодом 1, 769 земних діб на відстані 421,6 10^3 км.

Відповідь. $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \approx 1{,}9 \cdot 10^{27}$ кг.

Розв'язання. За другим законом динаміки, з врахуванням того, що прискорючою силою є сила всесвітнього тяжіння, виразивши нормальне прискорення через період обертання та радіус колової орбіти, матимемо $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$.Звідси відповідь.

Завдання

1. Визначити прискорення вільного падіння на поверхні Марса, якщо його середній радіус 3900 км, а маса 6,4 $\cdot 10^{26}$ г.

Відповідь. $g = \frac{GM}{R^2} \approx 2{,}81 м/с^2$.

2. Яка перша та друга космічна швидкість у планети з такою ж густиною як у Землі , але вдвічі більшим радіусом?

Відповідь. 2. $v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{G4/3 \cdot \pi R^3 \rho}{R}} = \sqrt{4/3 \cdot G\pi \rho R^2} = R\sqrt{4/3 \cdot G\pi\rho}$.

$v_I^| = 2v_I \approx 15{,}8$ км /с .

$v_{II}^| \approx 22{,}3$ км /с .

3. Знайти масу Сонця за періодом обертання Землі навколо Сонця, прийнявши відстань від Землі до Сонця за 150 млн км.

Відповідь. 3. $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг